УДК 517.95

В. В. Курта

ЕМКОСТЬ И ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Формулируется обобщенный принцип максимума для широкого класса уравнений параболического типа. Основную роль в используемой технике играет емкость.

Пусть D — область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^1_t$, $n \geqslant 2$, Δ — произвольная подобласть D, а $P, Q \subset \Delta$ — непересекающиеся замкнутые относительно Δ множества. Всякую тройку $(P, Q; \Delta)$ описанного вида будем называть конденсатором.

Зададим $\alpha \geqslant 1$. Величину

$$\operatorname{cap}_\alpha (P, Q; \Delta) = \inf \int\limits_\Delta |\nabla \varphi|^\alpha \, dxdt,$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям $\varphi(x, t)$, обращающимся в 1 на P, равным 0 на Q и удовлетворяющим условию Липшица локально в Δ, назовем α-емкостью конденсатора $(P, Q; \Delta)$ (см. [1, 2]).

Цепью открытых подмножеств $\{U_k\}$ области D называется последовательность открытых множеств $U_k \subset D$, $k = 1, 2, \ldots$, со свойствами: $\overline{U}_{k+1} \subset \subset U_k$, $\bigcap\limits_k U_k = \varnothing$ (замыкания U_k берутся относительно D).

Последовательность $\{p_n\}$ точек области D лежит вне цепи $\{U_k\}$, если при достаточно больших n и k точки $p_n \notin U_k$.

Будем говорить, следуя [3], что цепь $\{U_k\}$ имеет α-емкость нуль, и писать $\operatorname{cap}_\alpha (U_k) = 0$, если существует ограниченная подобласть Δ, $\overline{\Delta} \subset D$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}_\alpha (\overline{\Delta}, \overline{U}_k; D) = 0.$$

Пусть $A_i\,(x, t, \eta, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, измеримые функции, определенные на множестве $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i (x, t, \eta, \xi) \equiv \xi A \geqslant 0, \tag{1}$$

где знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $\xi = 0$. Пусть также $A\,(x, t, \eta, 0) = 0$ и

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^2 (x, t, \eta, \xi) = |A|^2 \leqslant f^2 (x, t), \tag{2}$$

$f\,(x, t) \in L^r\,(D)$ при некотором $r \in (1, \infty]$ и любых $(x, t, \eta, \xi) \in D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Обозначим через L дифференциальный оператор, определяемый в $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ равенством

$$L (g) = g_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} A_i (x, t, g, Dg), \tag{3}$$

$Dg = (D_1 g, \ldots, D_n g)$ — градиент функции $g\,(x, t)$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ниже будем рассматривать уравнения

$$L (g) = 0. \tag{4}$$

Под решениями (4) в D понимаются локально липшицевы в D функции, удовлетворяющие условию $L\,(g) = 0$ в слабом смысле. А именно, будем говорить, что локально липшицева в D функция $g\,(x, t)$ является решением уравнения (4), если для любой функции $\varphi\,(x, t) \in \mathrm{Lip}^0\, D$ выполнено

$$\int_D \left[\sum_{i=1}^{n} A_i (x, t, g, Dg)\, D_i \varphi - g \varphi_t\right] dxdt = 0. \tag{5}$$

В случае, когда функции $A_i\,(x, t, \eta, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $g\,(x, t)$ достаточно гладкие, (5) влечет за собой соотношение (4), понимаемое в классическом смысле.

Теорема 1. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $g\,(x, t)$ — ограниченное сверху в области D решение уравнения (4) и $f\,(x, t) \in L^r\,(D)$, при некотором $r \in (1, \infty]$. Предположим, что

$$\lim g (p_n) \leqslant c \tag{6}$$

вдоль любой последовательности $\{p_n\}$, не имеющей точек накопления в D и лежащей вне некоторой цепи открытых множеств $\{U_k\}$, $\frac{r}{r-1}$ — емкость которых равна 0 *. Тогда $g\,(x, t) \leqslant c$ всюду в D.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда в точке $p_0 \in D \cdot g\,(p_0) > c$. Обозначим через O — множество точек области D, в которых $g\,(p) > c_1 > c$. Пусть $u\,(p) = g\,(p) - c_1$ для $p \in O$ и $u\,(p) = 0$ для $p \in D \setminus O$. Далее пусть $\Delta, \overline{\Delta} \subset O$ — произвольное подмножество. Тогда существует k_0, начиная с которого $\overline{U}_k \cap \overline{\Delta} = \varnothing$ и $O' = O \setminus U_k$ — подобласть, компактно лежащая в D. Рассмотрим произвольную локально липшицеву функцию $\psi\,(x, t)$, равную 1 на Δ и 0 на U_k, и возьмем в интегральном равенстве (5) $\varphi\,(p) = \psi\,(p)\, u\,(p)$.

Тогда

$$\int_{O'} \psi (p) \sum_{i=1}^{n} A_i (x, t, g, Dg)\, D_i g dxdt =$$

$$= - \int_{O'} u\,(p) \sum_{i=1}^{n} A_i (x, t, g, Dg)\, D_i \psi dxdt + \int_{O'} g \varphi_t dxdt. \tag{7}$$

---

* При $r = \infty$ $\frac{r}{r-1}$ считаем равным 1.

В свою очередь,

$$\int_{O'} g\varphi_t dxdt = \int_{O'} u(\psi u)_t dxdt = \frac{1}{2}\int_{O'} u^2\psi_t dxdt. \quad (8)$$

Из соотношений (7), (8) следует

$$\int_{\Delta}\sum_{i=1}^{n} A_i(x, t, g, Dg) D_i g dxdt \leqslant \|u\|_\infty \|f\|_r \|\nabla\psi_x\|_q +$$

$$+\frac{1}{2}\|u^2\|_r\|\psi_t\|_q \leqslant 2\left(\|u\|_\infty\|f\|_r + \frac{1}{2}\|u^2\|_r\right)(\operatorname{cap}_q(\bar{\Delta}, \bar{U}_k;\ D))^{1/q},\ \ q = \frac{r}{r-1}. \quad (9)$$

По условию теоремы 1 правая часть полученного неравенства может быть сделана сколь угодно малой, и потому почти всюду на Δ

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x, t, g, Dg) D_i g = 0.$$

Учитывая произвольность выбора Δ и условие (1) на оператор L, заключаем, что почти всюду на O $Dg = 0$.

Из соотношения (5) сразу следует, что $g_t = 0$ почти всюду в O. Поэтому $g(x, t) = \mathrm{const}$ на O, что противоречит непустоте множества ∂O.

Теорема доказана.

Сформулированное утверждение является основным в данной работе и имеет достаточно широкую область применения. Мы рассмотрим лишь решения уравнения

$$g_t = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{D_i g}{\sqrt{1+|Dg|^2}}\right). \quad (10)$$

Пренебрежимыми множествами являются в этом случае множества нулевой n-мерной меры Хаусдорфа, что следует из теоремы 1 и хорошо известной связи между α-емкостью и мерой Хаусдорфа. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n+1}$, а E — замкнутое множество нулевой n-мерной меры Хаусдорфа, принадлежащее ∂D. Если $g(x, t)$ — ограниченное сверху решение уравнения (10) в D и

$$\overline{\lim}\, g(p_n) \leqslant c \quad (11)$$

вдоль любой последовательности $\{p_n\}$, не имеющей точек накопления в $D \cup E$, то $g(p) \leqslant c$ всюду в D.

Аналогичное утверждение может быть получено и для разности решения уравнения (10). В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n+1}$. Если $g_1(x, t)$ и $g_2(x, t)$ — произвольные решения уравнения (10) в области D, такие, что их разность $g_1(x, t) - g_2(x, t)$ ограничена в D и

$$\overline{\lim}\,(g_1(p_n) - g_2(p_n)) \leqslant c \quad (12)$$

вдоль любой последовательности $\{p_n\}$, не имеющей точек накопления в $D \cup E$, то $g_1(p) - g_2(p) \leqslant c$ всюду в D.

Доказательство. Утверждение теоремы 2 является частным случаем теоремы 1 при $r = \infty$. Действительно, рассмотрим функции

$$A_i(x, t, \eta, \xi) = \frac{D_i g_1}{\sqrt{1+|Dg_1|^2}} - \frac{D_i g_2}{\sqrt{1+|Dg_2|^2}} - D_i(g_1 - g_2) + \xi_i$$

при $\xi_i = D_i(g_1 - g_2)$ и

$$A_i(x, t, \eta, \xi) = \frac{\xi_i}{\sqrt{1+|\xi|^2}}.$$

при $\xi_i \neq D_i(g_1 - g_2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определим оператор $\mathscr{L}$ соотношением

$$\mathscr{L}u = u_t - \sum_{i=1}^{u} \frac{d}{dx_i} A_i(x, t, u, Du).$$

Функции $A_i(x, t, \eta, \xi)$ определены и измеримы на $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Разность $g_1 - g_2$ является решением уравнения $\mathscr{L}u = 0$.

Покажем, что оператор $\mathscr{L}$ удовлетворяет условиям (1), (2) с $r = \infty$. Для этого достаточно проверить выполнение этих условий для функций $A_i(x, t, \eta, \xi)$. Их справедливость при $\xi \neq D(g_1 - g_2)$ имеет место в силу определения $\mathscr{L}$. Покажем, что они выполнены также и при $\xi = D(g_1 - g_2)$. Положим $Tg = \dfrac{Dg}{\sqrt{1 + |Dg|^2}}$ и, следуя [4], докажем неравенство

$$(Tg_1 - Tg_2)(Dg_1 - Dg_2) \geqslant |Tg_1 - Tg_2|^2, \tag{13}$$

являющееся, очевидно, достаточным для выполнения условия (1).

Пусть $\alpha = (1, Dg_1)$, $\beta = (1, Dg_2)$ и $\cos\varphi = \dfrac{(\alpha \cdot \beta)}{|\alpha| \cdot |\beta|}$.

Тогда

$$(Tg_1 - Tg_2)(Dg_1 - Dg_2) = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} - \frac{\beta}{|\beta|}\right)(\alpha - \beta) = (|\alpha| + |\beta|)(1 - \cos\varphi) \tag{14}$$

и

$$\frac{\sqrt{1 + |Dg_1|^2} + \sqrt{1 + |Dg_2|^2}}{2} |Tg_1 - Tg_2|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\alpha| + |\beta|}{2} \left| \frac{\alpha}{|\alpha|} - \frac{\beta}{|\beta|} \right|^2 \leqslant (|\alpha| + |\beta|)(1 - \cos\varphi). \tag{15}$$

Неравенство (13) непосредственно следует из (14) и (15).

Условие (2) при $\xi = D(g_1 - g_2)$ проверяется тривиально:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^2 \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{D_i^2 g_1}{\sqrt{1 + |Dg_1|^2}} + \frac{D_i^2 g_2}{\sqrt{1 + |Dg_2|^2}} \right) \leqslant 4.$$

Как и в случае решений уравнения минимальных поверхностей, утверждение следствия 1 может быть справедливо даже в том случае, когда условие (11) выполняется только на части границы области D.

Следующее утверждение является распространением одного специального случая леммы Р. Финна ([5], см. также [6]) на решения уравнения (10) при $n = 2$.

Введем следующие обозначения. Пусть $G(r; r_1) = r_1 \operatorname{Arch} \dfrac{r}{r_1}$; $r \geqslant r_1$; $G(r; r_1) \leqslant 0$.

Уравнение

$$x_3 = G(r; r_1), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

определяет нижнюю половину катеноида и удовлетворяет уравнению минимальных поверхностей во внешности окружности $x_1^2 + x_2^2 = r_1^2$, принимая на ней нулевые значения.

Теорема 3. Пусть D — область, лежащая в цилиндре $Q = \{(x_1, x_2; t) \in \mathbb{R}^{2+1}\colon 0 < r_1 < r < r_2 < \infty, 0 < t < T < \infty\}$, а E — замкнутое множество нулевой 2-мерной меры Хаусдорфа, принадлежащее ∂D.

Если $g(p)$ — произвольное ограниченное сверху решение уравнения (10) при $n = 2$ в D и если для любой последовательности точек, сходящейся к точке, принадлежащей $\partial D \setminus E$ и не лежащей на множестве $\{r = r_1\} \times (0, T)$, выполнено неравенство

$$\overline{\lim}\,(g(p) - G(r; r_1)) \leqslant c, \tag{16}$$

то всюду в D

$$g(p) \leqslant G(r; r_1) + c. \tag{17}$$

Доказательство. Для произвольного r_1' из интервала $r_1 < r_1' < r_2$ положим

$$\varepsilon = \max_{r_1' \leqslant r \leqslant r_2} |G(r;\ r_1) - G(r;\ r_1')|.$$

Тогда в силу (16)

$$\overline{\lim}\,(g(p) - G(r;\ r_1')) \leqslant c + \varepsilon \quad (18)$$

для всех последовательностей, сходящихся к точкам множества $\partial D \setminus E$, лежащим в кольце $r_1' \leqslant r \leqslant r_2$. Мы же хотим показать, что

$$g(p) \leqslant G(r;\ r_1') + c + \varepsilon \quad (19)$$

в области $D' = D \cap (\{r_1' < r < r_2\} \times \{0 < t < T\})$.

Искомый результат немедленно следует из (19), если устремить r_1' к r_1. Для доказательства (19), достаточно в силу теоремы 2 показать, что (18) выполняется в каждой точке множества $\partial D'/E$. Поскольку это верно для точек, являющихся граничными для D, достаточно показать, что (18) выполняется во всех внутренних точках области D, лежащих на множестве $\{r = r_1'\} \times \{0 < t < T\}$. Допустим, что это не так. Тогда функция $g(p) - G(r;\ r_1')$ принимает максимальное значение $M > c + \varepsilon$ в некоторой точке $a = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ этого множества, внутренней относительно области D. По теореме 2

$$g(p) - G(r;\ r_1') \leqslant M$$

в D'. С другой стороны, $\sup |Dg|$ ограничен в точке a, тогда как

$$\left.\frac{\partial G(r;\ r_1')}{\partial r}\right|_{r=r_1'} = -\infty.$$

Поскольку $g - G = M$ в точке a, то из предыдущего следует, что $g - G > M$ во всех точках области D', достаточно близких к a и лежащих на прямой в плоскости $t = a_3$, соединяющей точку a с осью Ot. Следовательно, предположение о том, что (18) не выполняется, приводит нас к противоречию. Теорема доказана.

Впечатляющим (ср. [6, с. 108]) является пример области D, совпадающей с кольцевым цилиндром $\{r_1 < r < r_2\} \times \{0 < t < T\}$.

В связи с этим особенный интерес приобретают вопросы разрешимости начально-краевых задач для уравнения (10). Легко построить специальные случаи неразрешимости, используя теорему 3. Например, если $D = G \times \{0 < t < T\}$, где G — часть кольца $r_1 < r < r_2$, лежащая в первом квадранте, и вне множества $\{r = r_1\} \times \{0 < t < T\}$ заданы непрерывные краевые значения, равные $G(r;\ r_1)$, а на этом множестве какие-нибудь положительные значения, то решение не существует в силу (16), (17).

1. *Serrin I.* Local behaviour of solutions quasilinear equations // Acta Math.— 1964.— **111**.— P. 247—302.
2. *Saraiva L.* Removable singularities and quasilinear parabolic equations // Proc. London Math. Soc.— 1984.— 48, N 3.— P. 385—400.
3. *Миклюков В. М.* Емкость и обобщенный принцип максимума для квазилинейных уравнений эллиптического типа // Докл. СССР.— 1980.— **250**, № 6.— С. 1318—1320.
4. *Hwang I.* Comparison Principles and Liouville Theorems for Prescribed Mean Curvature Equations in Unbounded Domains // Annali Scuola Norm. Sup. Pisa. Ser. 4.— 1988.— 15, N 3.— P. 341—355.
5. *Finn R.* Remarks relevant to minimal surfaces of prescribed mean curvature // J. Anal Math.— 1965.— **14**.— P. 139—160.
6. *Оссерман Р.* Минимальные поверхности // Успехи мат. наук.— 1967.— **22**, вып. 4.— С. 55—136.

Ин-т прикл. математики
и механики АН Украины, Донецк

Получено 10.09.90